4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Η γενική μορφή του τριωνύμου με μεταβλητή $x \in \mathbb{R}$

i) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0$

ii) $\alpha\left[\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4\alpha^2}\right], \quad \alpha \neq 0$

2.
Ειδικές μορφές του τριωνύμου

- Όταν $\Delta > 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$,
  όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου
- Όταν $\Delta = 0$ τότε i) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
  ii) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho)^2$, όπου ρ η διπλή ρίζα του τριωνύμου
- Όταν $\Delta < 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \dfrac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$

3.
Ρίζα τριωνύμου

λέγεται κάθε τιμή της μεταβλητής x που μηδενίζει το τριώνυμο.

4.
Το πρόσημο του τριωνύμου

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \ \alpha \neq 0$ γίνεται :

- **Ετερόσημο του α**, μόνο όταν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.
- **Μηδέν**, μόνο όταν η τιμή του x είναι **κάποια από τις ρίζες** του τριωνύμου.
- **Ομόσημο του α** σε κάθε άλλη περίπτωση.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Οι ελλιπείς μορφές τριωνύμου.

i) $\alpha x^2 + \beta x \;=\; \alpha x^2 + \beta x + 0$

ii) $\alpha x^2 + \gamma \;=\; \alpha x^2 + 0 \cdot x + \gamma$

2.

Παραστάσεις της μορφής $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ μπορούμε να τις θεωρούμε σαν τριώνυμα είτε με μεταβλητή x, είτε με μεταβλητή y.

3.

Το γινόμενο $\alpha(x - x_1)(x - x_2)$ με $\alpha \neq 0$ είναι τριώνυμο με ρίζες x_1, x_2

4.

Το γινόμενο $\alpha(x - \rho)^2$ με $\alpha \neq 0$ είναι τριώνυμο με διπλή ρίζα ρ.

5.

Μια σύγχυση.

Μη μπερδεύουμε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.
Το μόνο κοινό τους είναι ότι έχουν τις ίδιες ρίζες.

6.

Μέθοδος.

Για να βρούμε τις ρίζες τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

7.

Ο τύπος $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ισχύει και όταν $\Delta = 0$

8.

Η κατανόηση του προσήμου τριωνύμου.

Ένα παράδειγμα

Έστω το τριώνυμο $f(x) = 1\,x^2 - 3x - 4$ με μεταβλητή $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ η τιμή του τριωνύμου είναι $f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$
ετερόσημη του $\alpha = 1$

Για $x = -2$ η τιμή του τριωνύμου είναι $f(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 4$
$= 4 + 6 - 4 = 6 > 0$
ομόσημη του $\alpha = 1$

Για $x = 4$ η τιμή του τριωνύμου είναι $f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 4$
$= 16 - 12 - 4 = 0$
το 4 είναι ρίζα του τριωνύμου

Παρατηρούμε ότι, για κάποιες τιμές του x το τριώνυμο είναι ομόσημο του α,
για κάποιες τιμές του x το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α
και για κάποιες τιμές του x το τριώνυμο είναι μηδέν.

9.

Μια αδυναμία.

Δε μπορούμε να έχουμε κανόνα που να μας συμπεραίνει απευθείας το πρόσημο τριωνύμου.
Μπορούμε, όμως, να έχουμε κανόνα που να μας συμπεραίνει, για ποια x το τριώνυμο είναι ομόσημο του α και για ποια είναι ετερόσημο του α.

10.

Η χρησιμότητα του προσήμου τριωνύμου.

Είναι το μοναδικό μέσον επίλυσης των ανισώσεων $2^{ου}$ βαθμού.

11.

Μέθοδος.

Για να λύσουμε ανίσωση $2^{ου}$ βαθμού

α) τη φέρνουμε στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ ή < 0

β) βρίσκουμε τη διακρίνουσα και τις ρίζες του τριωνύμου

γ) κατασκευάζουμε πίνακα τιμών

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ να γραφεί στη $2^η$ γενική μορφή τριωνύμου και σε μία ειδική.

Προτεινόμενη λύση

Η $2^η$ γενική μορφή τριωνύμου είναι $\alpha\left[\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$

Αλλά $\dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{-3}{2}$ και $\Delta = 9 - 8 = 1$.

Άρα $x^2 - 3x + 2 = 1\left[\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\right] = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$

Επειδή $\Delta = 1 > 0$, η ειδική μορφή του τριωνύμου θα είναι $\alpha(x - x_1)(x - x_2)$

Αλλά $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = 2$ ή 1.

Άρα $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

2.

Το τριώνυμο $-x^2 + 6x - 9$ να γραφεί σε μία ειδική μορφή.

Προτεινόμενη λύση

$\Delta = 36 - 36 = 0$, άρα το τριώνυμο γράφεται στη μορφή $\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$

Αλλά $\dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{6}{2(-1)} = -3$

Άρα $-x^2 + 6x - 9 = -1(x-3)^2 = -(x-3)^2$

3.

Δημιουργήστε δύο τριώνυμα που να έχουν ρίζες τους αριθμούς -3 και $\dfrac{1}{2}$.

Προτεινόμενη λύση

Τα ζητούμενα τριώνυμα θα έχουν την ειδική μορφή $\alpha(x - x_1)(x - x_2)$, $\alpha \neq 0$

Για $\alpha = 1$, προκύπτει το τριώνυμο $(x+3)(x-\dfrac{1}{2}) = x^2 - \dfrac{1}{2}x + 3x - \dfrac{3}{2}$

$= x^2 + \dfrac{5}{2}x - \dfrac{3}{2}$

Σχόλιο 2

Για $\alpha = 2$, προκύπτει το τριώνυμο $2(x+3)(x-\dfrac{1}{2}) = 2(x^2 - \dfrac{1}{2}x + 3x - \dfrac{3}{2})$

$= 2(x^2 + \dfrac{5}{2}x - \dfrac{3}{2})$

$= 2x^2 + 5x - 3$

4.

Δημιουργήστε δύο τριώνυμα που να έχουν διπλή ρίζα τον αριθμό 4.

Λύση

Τα ζητούμενα τριώνυμα θα έχουν την ειδική μορφή $\alpha(x-\rho)^2$, $\alpha \neq 0$

Για $\alpha = -1$, προκύπτει το τριώνυμο $-1(x-4)^2 = -(x^2 - 8x + 16)$
$= -x^2 + 8x - 16$

Σχόλιο 3

Για $\alpha = 3$, προκύπτει το τριώνυμο $3(x-4)^2 = 3(x^2 - 8x + 16)$
$= 3x^2 - 24x + 48$

5.

Δημιουργήστε ένα τριώνυμο που να μην έχει ρίζες.

Προτεινόμενη λύση

Το ζητούμενο τριώνυμο θα έχει την ειδική μορφή $\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$

Για $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\Delta = 4$ (αυθαίρετα) προκύπτει το τριώνυμο

$$1\left[\left(x+\frac{2}{2\cdot 1}\right)^2 + \frac{4}{4.1^2}\right] = (x+1)^2 + 1$$
$$= x^2 + 2x + 1 + 1$$
$$= x^2 + 2x + 2$$

6.

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η παράσταση $\lambda^2 x^2 - 3\lambda x^2 + 2\lambda x - 12 - 10x^2 - x$ είναι τριώνυμο με μεταβλητή x;

Προτεινόμενη λύση

Η παράσταση γράφεται $\Pi = (\lambda^2 - 3\lambda - 10)\, x^2 + (2\lambda - 1)x - 12$

Πρέπει $\lambda^2 - 3\lambda - 10 \neq 0$ **(1)**

Διακρίνουσα του τριωνύμου $\lambda^2 - 3\lambda - 10$: $\Delta = (-3)^2 - 4.\, 1(-10) = 9 + 40 = 49$

Σχόλιο 6

Ρίζες $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = 5$ ή -2

Η (1) $\Leftrightarrow$ $\lambda \neq 5$ και $\lambda \neq -2$

7.

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η παράσταση

$\lambda^2 x^3 + \lambda(-x^3 + x^2 - 2x) - (2x^3 - x^2 - 3x - 4)$

είναι τριώνυμο με μεταβλητή x ;

Προτεινόμενη λύση

Η παράσταση γράφεται $\lambda^2 x^3 - \lambda x^3 + \lambda x^2 - 2\lambda x - 2x^3 + x^2 + 3x + 4$

$(\lambda^2 - \lambda - 2)x^3 + (\lambda + 1)\,x^2 + (-2\lambda + 3)x + 4$

Πρέπει $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ και $\lambda + 1 \neq 0$ **(1)**

Διακρίνουσα του τριωνύμου $\lambda^2 - \lambda - 2$: $\Delta = 1 + 8 = 9$

Σχόλιο 6

Ρίζες $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = 2$ ή -1

Η (1) $\Leftrightarrow$ ($\lambda = 2$ ή $\lambda = -1$) και $\lambda \neq -1$ $\Leftrightarrow$ $\lambda = 2$

8.

Να μετατρέψετε σε γινόμενο την παράσταση $\Pi = x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha$.

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε την παράσταση σαν τριώνυμο με μεταβλητή x.

$$\begin{aligned}\Delta &= (\alpha + 1)^2 - 4\alpha \\ &= \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 4\alpha \\ &= \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Ρίζες :
$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha + 1 \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2}}{2} = \frac{\alpha + 1 \pm (\alpha - 1)}{2} \\ &= \frac{\alpha + 1 + (\alpha - 1)}{2} \text{ ή } \frac{\alpha + 1 - (\alpha - 1)}{2} \\ &= \frac{\alpha + 1 + \alpha - 1}{2} \text{ ή } \frac{\alpha + 1 - \alpha + 1}{2} \\ &= \alpha \text{ ή } 1\end{aligned}$$

Άρα $\Pi = (x - \alpha)(x - 1)$

9.

Να μετατρέψετε σε τέλειο τετράγωνο την παράσταση $4x^2 + 4\sqrt{3}\,xy + 3y^2$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 2

Θεωρούμε την παράσταση σαν τριώνυμο με μεταβλητή x.

$\Delta = (4\sqrt{3}\,y)^2 - 4\cdot 4\cdot 3\,y^2 = 16\cdot 3\,y^2 - 48\,y^2 = 0$

Άρα το τριώνυμο θα έχει τη μορφή $\alpha\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$

Επομένως $4x^2 + 4\sqrt{3}\,xy + 3y^2 = 4\left(x + \dfrac{4\sqrt{3}y}{2\cdot 4}\right)^2$

$$= 4\left(x + \frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2$$

$$= 4\frac{\left(2x + \sqrt{3}y\right)^2}{4} = \left(2x + \sqrt{3}y\right)^2$$

10.

Να μετατρέψετε σε γινόμενο την παράσταση $\Pi = 3\alpha^2 + \alpha\beta - 4\beta^2$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 2

Θεωρούμε την παράσταση σαν τριώνυμο με μεταβλητή α.

$\Delta = \beta^2 - 4\cdot 3\cdot(-4\beta^2) = \beta^2 + 48\beta^2 = 49\beta^2$

Ρίζες : $\alpha = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{49\beta^2}}{2\cdot 3} = \dfrac{-\beta \pm 7\beta}{6} = \beta$ ή $-\dfrac{4\beta}{3}$

Άρα $\Pi = 3(\alpha - \beta)(\alpha + \dfrac{4\beta}{3}) = (\alpha - \beta)(3\alpha + 4\beta)$

11.

Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x, y τέτοιοι ώστε να ισχύει $x^2 - xy + y = 0$, να αποδείξετε ότι $y \in (-\infty,\ 0] \cup [4,\ +\infty)$.

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 2

Θεωρούμε τη σχέση $x^2 - xy + y = 0$ σαν εξίσωση με άγνωστο x

Επειδή $x \in \mathbb{R}$ (δηλαδή η εξίσωση έχει ρίζα), θα είναι $\Delta \geq 0$

$$y^2 - 4y \geq 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Διακρίνουσα του τριωνύμου $y^2 - 4y$: $\delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 16 > 0$

Ρίζες του τριωνύμου $y^2 - 4y$: 0 ή 4

Πρόσημο του τριωνύμου

y	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$y^2 - 4y$		+	0	–	0	+	

Σχόλιο 11

Η (1) $\Leftrightarrow$ $y \leq 0$ ή $y \geq 4$ $\Leftrightarrow$ $y \in (-\infty,\ 0] \cup [4,\ +\infty)$.

12.

Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x, y τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$x^2 - 2xy + 2x + 2y^2 = 1,$$

να αποδείξετε ότι $(-1-\sqrt{3}\,] \leq y \leq [-1+\sqrt{3}\,)$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 2

$x^2 - 2xy + 2x + 2y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2(1-y)x + 2y^2 - 1 = 0$

Θεωρούμε αυτή την ισότητα σαν εξίσωση με άγνωστο x

Επειδή $x \in \mathbb{R}$ (δηλ. η εξίσωση έχει ρίζα), θα είναι $\Delta \geq 0$

$$4(1-y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2y^2 - 1) \geq 0$$

$$(1-y)^2 - (2y^2 - 1) \geq 0$$

$$1 - 2y + y^2 - 2y^2 + 1 \geq 0$$

$$-y^2 - 2y + 2 \geq 0$$

$$y^2 + 2y - 2 \leq 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Διακρίνουσα του τριωνύμου $y^2 + 2y - 2$: $\delta = 4 + 8 = 12$

Ρίζες του τριωνύμου $y^2 + 2y - 2$: $y = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$

Πρόσημο του τριωνύμου

y	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$y^2 + 2y - 2$		+	0	–	0	+	

Η (1) $\Leftrightarrow$ $(-1-\sqrt{3}\,] \leq y \leq [-1+\sqrt{3}\,)$

Σχόλιο 11

13.

Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $(\lambda - 2)\ x^2 + 2\lambda x + 3\lambda - 6 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει το τριώνυμο να είναι ομόσημο (θετικό) του $\alpha = \lambda - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad \lambda - 2 > 0 \quad$ **(1)** και $\Delta < 0$ **(2)**

Η (1) $\Leftrightarrow \quad \lambda > 2 \quad$ **(3)**

Η (2) $\Leftrightarrow$

$$(2\lambda)^2 - 4(\lambda - 2)(3\lambda - 6) < 0$$
$$4\lambda^2 - 4(3\lambda^2 - 6\lambda - 6\lambda + 12) < 0$$
$$\lambda^2 - (3\lambda^2 - 12\lambda + 12) < 0$$
$$\lambda^2 - 3\lambda^2 + 12\lambda - 12 < 0$$
$$-2\lambda^2 + 12\lambda - 12 < 0$$
$$\lambda^2 - 6\lambda + 6 > 0 \qquad \textbf{(4)}$$

$\delta = 36 - 24 = 12 \qquad$ ρίζες $\lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$

Πρόσημο του τριωνύμου (4)

λ	$-\infty$		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$		$+\infty$
$\lambda^2 - 6\lambda + 6$		+	0	–	0	+	

Η (4) $\Leftrightarrow \quad \lambda < 3 - \sqrt{3}$ ή $\lambda > 3 + \sqrt{3}$ **(5)**

Συναλήθευση των (3), (5) : $\quad \lambda > 3 + \sqrt{3}$

14.

Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\dfrac{(\lambda+1)(x^2+1)}{2} > \lambda x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη

$$\frac{(\lambda+1)(x^2+1)}{2} > \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + 1)(\ x^2 + 1) > 2\lambda x$$
$$\lambda x^2 + \lambda + x^2 + 1 - 2\lambda x > 0$$
$$(\lambda + 1)\,x^2 - 2\lambda x + (\lambda + 1) > 0$$

και συνεχίζουμε όπως στην άσκηση 13.

15.

Θεωρούμε το κλάσμα $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

Να αποδείξετε ότι

i) το κλάσμα έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) $\dfrac{2}{3} \le y \le 2$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αρκεί να αποδείξετε ότι $x^2 + x + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow$ το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ δεν έχει ρίζες

$\Rightarrow x^2 + x + 1 \neq 0$

ii)

$$y = \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \Leftrightarrow y(x^2+x+1) = x^2+1$$

$$y x^2 + yx + y = x^2 + 1$$

$$y x^2 + yx + y - x^2 - 1 = 0$$

$$(y-1)x^2 + yx + (y-1) = 0 \qquad \textbf{(A)}$$

- Όταν $y - 1 = 0$, δηλαδή όταν $y = 1$.
  Η (Α) $\Leftrightarrow (1-1)x^2 + 1 \cdot x + (1-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  Δηλαδή, το κλάσμα y παίρνει την τιμή 1, για $x = 0$.

- Όταν $y - 1 \neq 0$, δηλαδή όταν $y \neq 1$.
  Η (Α) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού.
  $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ η εξίσωση (Α) έχει ρίζες

$$\Delta \ge 0$$

$$y^2 - 4(y-1)(y-1) \ge 0$$

$$y^2 - 4(y^2 - 2y + 1) \ge 0$$

$$y^2 - 4y^2 + 8y - 4 \ge 0$$

$$-3y^2 + 8y - 4 \ge 0$$

$$3y^2 - 8y + 4 \le 0 \qquad \textbf{(B)}$$

Διακρίνουσα του τριωνύμου $3y^2 - 8y + 4$: $\delta = 64 - 48 = 16$

Ρίζες του τριωνύμου $3y^2 - 8y + 4$: $y = \dfrac{8 \pm 4}{6} = 2$ ή $\dfrac{2}{3}$

Πρόσημο του τριωνύμου

y	$-\infty$		$2/3$		2		$+\infty$
$3y^2 - 8y + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(Β) $\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \le y \le 2$